

MỤC LỤC

KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM VỮNG.....	8
------------------------------------	---

PHẦN I: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1. MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP	17
------------------------------------	----

I - MỆNH ĐỀ	17
II - TẬP HỢP	18

CHƯƠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.....	20
--	----

I - BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	20
II - HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.....	22

CHƯƠNG 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC.....	24
---	----

I - ĐỊNH LÍ CÔSIN	24
II - ĐỊNH LÍ SIN	24
III - CÁC CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC	24
IV - CÔNG THỨC ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN	25

CHƯƠNG 4. HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG	26
--	----

I - HÀM SỐ	26
II - HÀM SỐ BẬC HAI.....	27
III - DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI	29
IV - PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI	30

CHƯƠNG 5. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC.....	31
---	----

I - CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	31
II - HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	33
III - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	34

CHƯƠNG 6. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN.....	36
---	----

CHƯƠNG 7. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC	37
---	----

I - GIỚI HẠN DÃY SỐ	37
II - GIỚI HẠN HÀM SỐ	38
III - HÀM SỐ LIÊN TỤC	39
IV - CÁCH BẤM MÁY CASIO TÌM GIỚI HẠN	40

CHƯƠNG 8. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT41

I – CÔNG THỨC LŨY THỪA, LOGARIT	41
II - HÀM SỐ LŨY THỪA	42
III - HÀM SỐ MŨ.....	44
IV - HÀM SỐ LOGARIT	45
V - MỘT SỐ BÀI TOÁN LÃI SUẤT, BÀI TOÁN THỰC TẾ	46
VI - PHƯƠNG TRÌNH MŨ.....	47
VII - PHƯƠNG TRÌNH MŨ.....	48
VIII - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ.....	49
IX - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ.....	50
X - BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ M.....	50

CHƯƠNG 9. ĐẠO HÀM52

I - ĐẠO HÀM	52
II - PHƯƠNG TRÌNH CỦA TIẾP TUYẾN.....	53

CHƯƠNG 10. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ.....55

I - HÀM SỐ BẬC HAI	55
II – HÀM SỐ BẬC BA	59
III – HÀM SỐ BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG	64
IV – HÀM SỐ PHÂN THỨC BẬC NHẤT/BẬC NHẤT	66
V – HÀM SỐ PHÂN THỨC BẬC HAI/BẬC NHẤT	69
VI - PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ	73

CHƯƠNG 11. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN.....75

I – BẢNG NGUYÊN HÀM CƠ BẢN	75
II - TÍCH PHÂN.....	76
III - NGUYÊN HÀM CỦA HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ.....	78
IV – PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VÀO VI PHÂN	79
V – DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG.....	80
VI – THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY	80
VII – CÔNG THỨC TÍNH NHANH.....	81
VIII – PHƯƠNG TRÌNH CỦA MỘT SỐ ĐƯỜNG CƠ BẢN ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ.....	83
IX – ỨNG DỤNG VẬT LÝ	86
X – NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN CỦA HÀM ẨN	87

CHƯƠNG 12. LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ88

I - CHU TRÌNH EULER	88
II - CHU TRÌNH HAMILTON	88
III - BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI TỐI ƯU	89

PHẦN II: HÌNH HỌC**CHƯƠNG 1. VECTƠ.....91****CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG94**

I - TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ	94
II - ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ.....	95
III - ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ.....	98
IV - BA ĐƯỜNG CONIC TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ	103

CHƯƠNG 3. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN.....106

I - HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	106
II - ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG	107
III - HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	109

CHƯƠNG 4. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.....110

I - GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.....	110
II - GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	110
III - GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG	112
IV - KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG	114
V - KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU	116
VI - THỂ TÍCH KHỐI CHÓP, LĂNG TRỤ.....	117

CHƯƠNG 5. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN121

I - TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN.....	121
II - BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ.....	122
III - TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ	123
IV - ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN	142

CHƯƠNG 6. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.....126

I - PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	126
II - PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN	128
III - PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU.....	129
IV - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI.....	129

V – GÓC.....	132
VI – KHOẢNG CÁCH.....	133
VII – CÁC DẠNG TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG.....	134
VIII - CÁC DẠNG TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	140
IX – CÁC DẠNG TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU.....	144
X – DẠNG TOÁN CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ.....	146

PHẦN III: THỐNG KÊ - XÁC SUẤT

CHƯƠNG 1. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU.....153

I - SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ.....	153
I – MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM.....	154
II – MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM.....	155

CHƯƠNG 2. XÁC SUẤT, ĐẠI SỐ TỔ HỢP.....157

I – QUY TẮC ĐẾM	157
II – HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP	158
III – NHỊ THỨC NEWTON	160
IV - BIẾN CỐ	161
V – XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN.....	161
VI - XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN	164

II - HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

a) Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $F(x, y) = ax + by$ trên một miền đa giác

Ví dụ: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ -2x + 3y - 6 < 0 \quad (I) \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$$

Giải

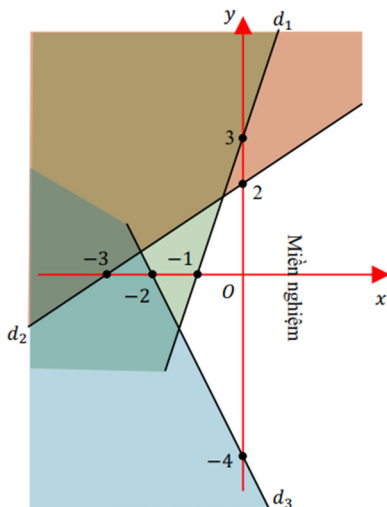
Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng

$$(d_1): 3x - y + 3 = 0$$

$$(d_2): -2x + 3y - 6 = 0$$

$$(d_3): 2x + y + 4 = 0$$

Thử trực tiếp ta thấy $(0; 0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa là gốc tọa độ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình của hệ (I). Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không tô đậm trên hình (không kể biên là miền nghiệm của hệ (I)).

b) Tìm cực trị biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác

Các bước làm bài

Bước 1: Đặt ẩn số phụ x và y tương ứng với các đại lượng mà đề bài cho.

Bước 2: Thiết lập các điều kiện cho x và y và biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) phụ thuộc vào x và y .

Bước 3: Đặt tất cả các điều kiện của x và y là cùng một hệ. Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên.

Bước 4: Tìm đỉnh của miền nghiệm của hệ trên.

Bước 5: Tính giá trị của biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tại các đỉnh của miền nghiệm rồi chọn ra giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) theo yêu cầu của đề bài.

c) Áp dụng vào bài toán kinh tế

Ví dụ: Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II?

Phân tích bài toán: Nếu sử dụng x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II thì theo giả thiết, có thể chiết xuất được $(20x+10y)$ kg chất A và $(0,6x+1,5y)$ kg chất B. Theo giả thiết, x và y phải thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x+10y \geq 140 \\ 0,6x+1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x+1y \geq 70 \\ 2x+5y \geq 30 \end{cases}$$

Tổng số tiền mua nguyên liệu là $T(x; y) = 4x + 3y$.

Bài toán đã cho trở thành:

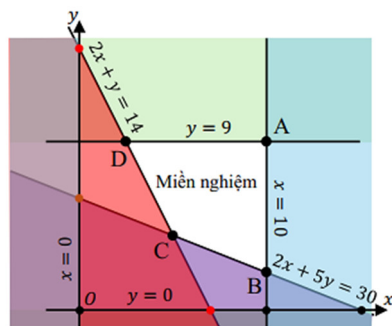
Tìm các số x và y thỏa mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases} \text{ sao cho } T(x; y) = 4x + 3y$$

có giá trị nhỏ nhất.

Để giải bài toán này, ta thừa nhận rằng biểu thức $T(x; y)$ có giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) và giá trị ấy đạt được tại một trong các đỉnh của tứ giác ABCD. Bằng cách tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D rồi so sánh các giá trị tương ứng của $T(x; y)$, ta được $T(5; 4) = 32$ là giá trị nhỏ nhất.

Vậy để chi phí nguyên liệu ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II (khi đó, chi phí tổng cộng là 32 triệu đồng).



Miền nghiệm là miền màu trắng trên hình vẽ

II – HÀM SỐ BẬC HAI

1. Hàm số bậc hai

Có dạng: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Đồ thị là parabol (P) với:

- Định: $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- Trục đối xứng: $x = -\frac{b}{2a}$
- Bề lõm quay lên trên nếu $a > 0$, quay xuống dưới nếu $a < 0$.

• Cách tìm tọa độ đỉnh bằng CASIO:

Chọn tính năng giải phương trình bậc hai

Ví dụ: Tìm tọa độ đỉnh của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$: Bấm: [MENU] [9] [2] [2]	
Bấm: [=] [=] [=] [=] Vậy tọa độ đỉnh của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ là $I(1; -4)$	

Chú ý: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì (P) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là x_1, x_2 .

$a > 0$	$a < 0$
$\min_{\mathbb{R}} y = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$	$\max_{\mathbb{R}} y = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

2. Nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Biệt thức: $\Delta = b^2 - 4ac$; biệt thức thu gọn: $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$.

TH1: $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\left(x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \right)$

TH2: $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$): Phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$ $\left(x = -\frac{b'}{a} \right)$

TH3: $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm.

3. Khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số bậc hai

Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$a > 0$			$a < 0$				
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$	y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Với $a > 0$ thì hàm số **ngịch biến** trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right)$;

đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$

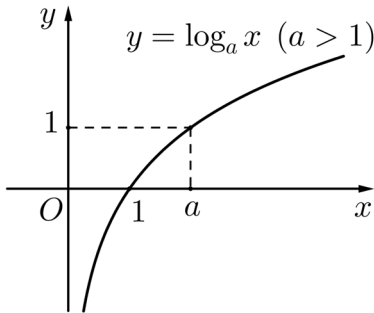
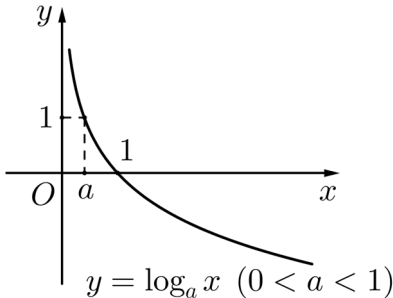
Với $a < 0$ thì hàm số **đồng biến** trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right)$;

ngịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$

IV - HÀM SỐ LOGARIT

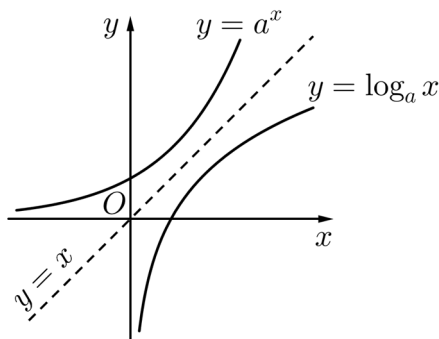
Định nghĩa:

Hàm số $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$) được gọi là **hàm số logarit** cơ số a .

$y = \log_a x$, $a > 1$	$y = \log_a x$, $0 < a < 1$
1. Tập xác định: $(0; +\infty)$. Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.	1. Tập xác định: $(0; +\infty)$. Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên - Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. - Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$. - Tiệm cận: Oy là tiệm cận đứng.	2. Sự biến thiên - Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. - Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$. - Tiệm cận: Oy là tiệm cận đứng.
3. Đồ thị 	3. Đồ thị 
Đồ thị của hàm số logarit $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$) luôn đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía bên phải trục tung.	

Mối liên hệ giữa đồ thị hàm mũ và đồ thị hàm logarit

Đồ thị của các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.



So sánh hai logarit

Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$. Khi đó:

- Với $a > 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.
- Với $0 < a < 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

V - MỘT SỐ BÀI TOÁN LÃI SUẤT, BÀI TOÁN THỰC TẾ

1. Bài toán lãi kép

- Gửi vào ngân hàng số tiền là A đồng, với lãi suất là r trên một kì hạn.
- Sau n kì hạn ($n \geq 1$), số tiền cả vốn lẫn lãi là: $T = A(1+r)^n$.

2. Bài toán tiền gửi hàng tháng

- Hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là A đồng (gửi đầu tháng) với lãi suất hàng tháng là r .

- Tổng số tiền sau n tháng ($n \geq 1$) là: $T = \frac{A}{r}(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]$.

3. Bài toán vay trả góp

- Vay vốn A đồng, lãi suất mỗi tháng là r , mỗi tháng trả a đồng (trả cuối tháng).
- Số tiền nợ còn lại sau n tháng ($n \geq 1$) là: $T = A(1+r)^n - \frac{a}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$.

4. Bài toán gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng

• Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là a đồng.

• Số tiền còn lại sau n tháng là: $T = A(1+r)^n - a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

5. Bài toán tăng lương

• Lương khởi điểm là A đồng/tháng. Cứ sau n tháng thì lương được tăng thêm $r\%$ /tháng.

• Tổng số tiền nhận được sau kn tháng là: $S_{kn} = Ak \frac{(1+r)^k - 1}{r}$.

VI - PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$)

• Với $b > 0$, ta có: $a^x = b \Leftrightarrow \boxed{x = \log_a b}$.

• Với $b \leq 0$, phương trình đã cho vô nghiệm.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

Nếu $a > 0; a \neq 1$ thì phương trình: $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$

3. Đặt ẩn phụ

Loại 1. Phương trình dạng $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$.

• Ta đặt $t = a^{f(x)}$ ($t > 0$) đưa về dạng phương trình ẩn t ta được: $mt^2 + nt + p = 0$.

• Với phương trình: $m.a^{3f(x)} + n.a^{2f(x)} + p.a^{f(x)} + q = 0$ ta cũng đặt $t = a^{f(x)}$ ($t > 0$) đưa về phương trình bậc 3 đối với ẩn t .

Loại 2. Phương trình dạng

$$m.A^{2f(x)} + n.(AB)^{f(x)} + p.(B)^{2f(x)} = 0 \quad (2).$$

• Chia 2 vế của phương trình (2) cho $(B)^{2f(x)}$ ta được :

$$PT \Leftrightarrow m.A^{2f(x)} + n.(AB)^{f(x)} + p.(B)^{2f(x)} = 0 \Leftrightarrow m.\left(\frac{A}{B}\right)^{2f(x)} + n.\left(\frac{A}{B}\right)^{f(x)} + p = 0$$

• Đặt $t = \left(\frac{A}{B}\right)^{f(x)}$ ($t > 0$) suy ra $mt^2 + nt + p = 0$.

4. Logarit hóa

Thường dùng khi phương trình không đưa được về cùng cơ số

• Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.

• Phương trình

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = g(x) \cdot \log_a b}$$

VII - PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình cơ bản

Là phương trình có dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (1), trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số chứa ẩn x cần giải.

Cách giải

• Điều kiện: $\begin{cases} a > 0; a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

• (1) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Chú ý:

• Với dạng phương trình $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

• Đẩy lũy thừa bậc chẵn: $\boxed{\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|}$, nếu $x > 0$ thì $\log_a x^{2n} = 2n \log_a x$.

• Với phương trình sau khi biến đổi được về dạng

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}.$$

2. Đặt ẩn phụ

Phương trình dạng $\boxed{m \cdot [\log_a f(x)]^2 + n \cdot \log_a f(x) + p = 0}$

• Điều kiện $\begin{cases} a > 0; a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

• Ta đặt $t = \log_a f(x)$. Phương trình trở thành: $mt^2 + nt + p = 0$.

3. Phương pháp mũ hóa

Thường dùng khi phương trình không đưa được về cùng cơ số

Phương trình $\log_a [f(x)] = \log_b [g(x)]$ (với $a > 0; a \neq 1$).

• Ta đặt $\log_a [f(x)] = \log_b [g(x)] = t \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$

—→ phương trình mũ ẩn t .

• Sử dụng tính đơn điệu của hàm số hoặc đặt ẩn phụ để giải phương trình mũ ẩn t .

VIII - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

Xét bất phương trình $a^x > b$, ($a > 0, a \neq 1$).

- Với $a > 1$ thì bất phương trình $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.
- Với $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

2. Đưa về cùng cơ số

Xét bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

- Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (cùng chiều khi $a > 1$).
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (ngược chiều khi $0 < a < 1$).
- Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1) \cdot [f(x) - g(x)] > 0$

3. Logarit hóa

Thường dùng khi phương trình không đưa được về cùng cơ số

Xét bất phương trình dạng: $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ (*) (với $a \neq 1; b > 0$).

- Lấy logarit 2 vế với cơ số $a > 1$ ta được:
 $(*) \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \log_a b$.
- Lấy logarit 2 vế với cơ số $0 < a < 1$ ta được:
 $(*) \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \log_a b$.

IX - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình logarit cơ bản

Xét bất phương trình $\log_a x > b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

2. Đưa về cùng cơ số

Xét bất phương trình $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (**cùng chiều**)
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (**ngược chiều**)
- Nếu a chứa ẩn thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0; g(x) > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] > 0 \end{cases}$

X - BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ M

Bài toán 1:

Tìm tham số m để $f(x; m) = 0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên miền D .

Bước 1:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số và cô lập m , đưa về dạng:
 $f(x) = m$ (1)
- Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Bước 2: Khảo sát hàm số $y = f(x)$ bằng **CALC - TABLE**

- Tìm TXĐ của hàm số $f(x)$ rồi **CALC** (**CALC**) các giá trị đặc biệt để phác họa được đồ thị hàm số $f(x)$ chính xác nhất:

$x \rightarrow -\infty$: **CALC** $X = 10^9$ (Đối với hàm mũ: **CALC** $X = 10$)

$x \rightarrow +\infty$: **CALC** $X = -10^9$ (Đối với hàm mũ: **CALC** $X = -10$)

Điểm không xác định của hàm số $f(x)$:

$x \rightarrow x_0^-$: **CALC** $X = x_0 - 10^{-9}$ và $x \rightarrow x_0^+$: **CALC** $X = x_0 + 10^{-9}$

- Dùng **TABLE** (**MENU** **8**) để khảo sát đồ thị hàm số $y = f(x)$. Quan sát bảng giá trị để phác họa đồ thị hàm số $f(x)$.

Chú ý:

- Ta cần đưa máy về chế độ 1 hàm: **SHIFT** **MENU** **▼** **▼** **1** **1**
- Quy ước khi nhập Start và End trong TABLE: $\begin{cases} -\infty = -10 \\ +\infty = 10 \end{cases}$
- Với bài toán tìm giá trị của m để bài toán có nghiệm thì điều kiện của m là: $\min f(x) \leq m \leq \max f(x)$ (không cần vẽ BBT chỉ cần dùng TABLE để tìm Min và Max của hàm số $f(x)$)

Bài toán 2:

Tìm tham số m để $f(x; m) \geq 0$ hoặc $f(x; m) \leq 0$ có nghiệm trên D.

Bước 1. Tách m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $m \geq f(x)$ hoặc $m \leq f(x)$.

Bước 2. Khảo sát hàm số $y = f(x)$ bằng **CALC – TABLE**

- Tìm TXĐ của hàm số $f(x)$ rồi **CALC** (**CALC**) các giá trị đặc biệt để phác họa được đồ thị hàm số $f(x)$ chính xác nhất:

$x \rightarrow -\infty$: **CALC** $X = 10^9$ (Đối với hàm mũ: **CALC** $X = 10$)

$x \rightarrow +\infty$: **CALC** $X = -10^9$ (Đối với hàm mũ: **CALC** $X = -10$)

Điểm không xác định của hàm số $f(x)$:

$x \rightarrow x_0^-$: **CALC** $X = x_0 - 10^{-9}$ và $x \rightarrow x_0^+$: **CALC** $X = x_0 + 10^{-9}$

- Dùng **TABLE** (**MENU** **8**) để khảo sát đồ thị hàm số $y = f(x)$. Quan sát bảng giá trị để tìm $\min_D f(x)$ hoặc $\max_D f(x)$.

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm:

- $m \leq f(x)$ **có nghiệm** trên $D \Leftrightarrow m \leq \max_{x \in D} f(x)$.
- $m \geq f(x)$ **có nghiệm** trên $D \Leftrightarrow m \geq \min_{x \in D} f(x)$.
- $m \leq f(x)$ **ng nghiệm đúng** $\forall x \in D \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in D} f(x)$
- $m \geq f(x)$ **ng nghiệm đúng** $\forall x \in D \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in D} f(x)$.

III – HÀM SỐ BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

1. Cực trị hàm số trùng phương

$$(C): f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Đạo hàm: } y' = 4ax^3 + 2bx. \text{ Khi đó } y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Hàm số trùng phương có 1 điểm cực trị hoặc có 3 điểm cực trị

• **Hàm số có 1 điểm cực trị** $\Leftrightarrow y' = 0$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2a}$ vô nghiệm hoặc có

nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow ab \geq 0$.

• **Hàm số có 3 điểm cực trị** $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$.

Hàm số có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$		Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$	
			
Hàm số có đúng 1 điểm cực trị và điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$	Hàm số có đúng 1 điểm cực trị và điểm cực trị đó là điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$	Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	Hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

2. Một số điều kiện liên quan các điểm cực trị của đồ thị bậc bốn trùng phương

Giả sử đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 điểm cực trị

$A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành tam giác ABC với

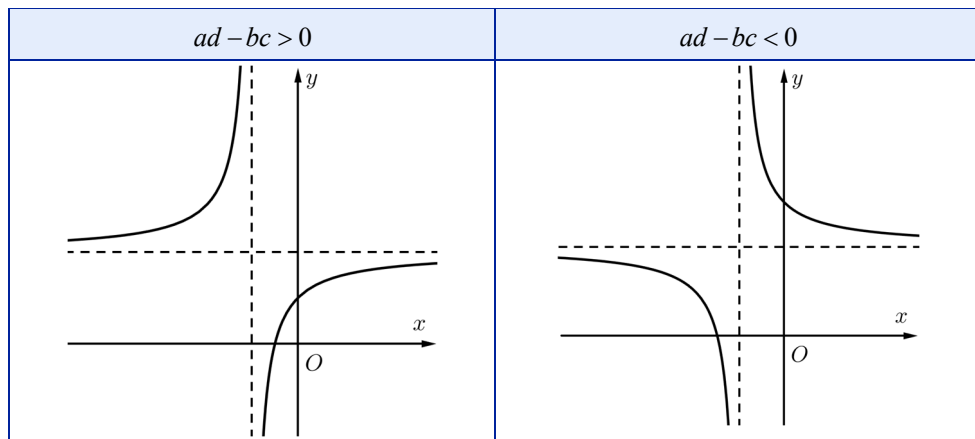
$$AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, \quad BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}} \text{ thỏa mãn đủ điều kiện:}$$

Dữ kiện	Công thức
1. Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2. Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
3. Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
4. Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3 (S_0)^2 + b^5 = 0$
5. Tam giác ABC có diện tích $\max S = S_0$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
6. Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}} \right)}$
7. Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
8. Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2 n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
9. Tam giác ABC với 2 điểm cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
10. Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11. Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
12. Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
13. Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$
14. Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
15. Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
16. Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
17. Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3 \cdot k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
18. Trục hoành chia tam giác ABC thành 2 phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
19. Ba điểm cực trị A, B, C cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$

IV – HÀM SỐ PHÂN THỨC BẬC NHẤT/BẬC NHẤT

1. Các dạng đồ thị

Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)



2. Dấu hệ số

Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$: - Nằm bên trái Oy : $cd > 0$. - Nằm bên phải Oy : $cd < 0$. - Trùng với Oy : $d = 0$.	Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$: - Nằm phía trên Ox : $ac > 0$. - Nằm phía dưới Ox : $ac < 0$. - Trùng với Ox : $a = 0$.
Giao điểm với trục hoành Ox : $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$: - Nằm bên trái Oy : $ab > 0$. - Nằm bên phải Oy : $ab < 0$. - Thuộc trục Oy : $b = 0$.	Giao điểm với trục tung Oy : $B\left(0; \frac{b}{d}\right)$: - Nằm phía trên Ox : $bd > 0$. - Nằm phía dưới Ox : $bd < 0$. - Thuộc trục Ox : $b = 0$.
Nhận biết tính đơn điệu: - Hai nhánh đi lên: $ad-bc > 0$. - Hai nhánh đi xuống: $ad-bc < 0$.	

3. Tính đơn điệu

Tìm m để hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$) đồng biến, nghịch biến trên khoảng D

- **Hàm số đồng biến** trên $D \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin D \end{cases}$
- **Hàm số nghịch biến** trên $D \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin D \end{cases}$

4. Tiệm cận

- Hàm số có hai đường tiệm cận
- **Tiệm cận ngang:** $y = \frac{a}{c}$ (hai hệ số của x chia cho nhau)
- **Tiệm cận đứng:** $x = -\frac{d}{c}$ (nghiệm của mẫu số = 0)
- Đồ thị nhận giao điểm 2 đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.
- Nhận 2 đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

5. Các bài toán min, max

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) .

Đưa công thức hàm về dạng chính tắc: Đặt

$$\begin{cases} X = x - x_{\text{tiệm cận}} \\ Y = y - y_{\text{tiệm cận}} \end{cases} \Rightarrow Y = -\frac{\text{Từ số của đạo hàm}}{c^2 X} = \frac{k}{X}$$

Bài toán 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ 1 điểm thuộc đồ thị tới 2 đường tiệm cận là:

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{X^2 + \frac{k^2}{X^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{X^2 \frac{k^2}{X^2}}} = \sqrt{2|k|}$$

(Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm)

$$\Rightarrow D_{\min} = \sqrt{2|k|}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $X^4 = k^2 \Leftrightarrow X^2 = |k| \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{|k|}$

Bài toán 2: Cho hàm phân thức: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tiếp tuyến tại tiếp điểm M cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt ở A và B thì:

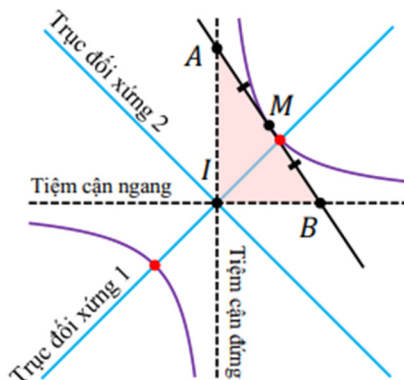
- M luôn là trung điểm của AB
- Diện tích ΔIAB không đổi:

$$S_{IAB} = \frac{2}{c^2} |ad - bc|.$$

- Chu vi ΔIAB nhỏ nhất khi

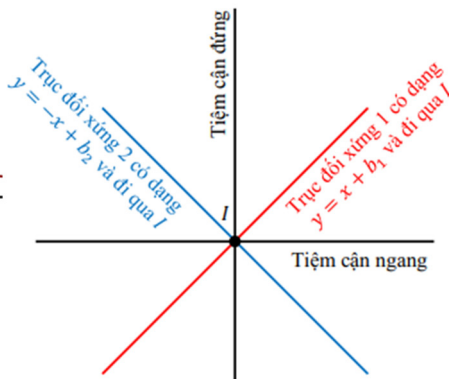
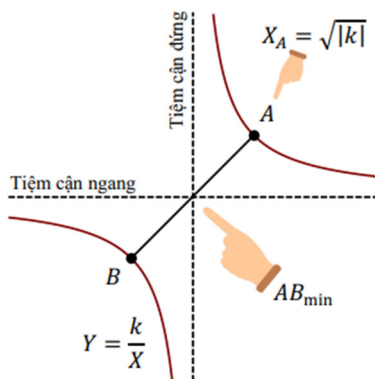
$M = \text{Trục đối xứng} \cap \text{Đồ thị hàm số}.$

(I là giao điểm của 2 đường tiệm cận)



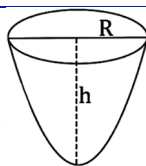
Bài toán 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có đồ thị (C) . Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.

- Ta có: $AB_{\min} = \sqrt{8|k|}$. Xảy ra khi và chỉ khi $X_A = -X_B = \sqrt{|k|}$.



3. Khối tròn xoay sinh ra bởi Parabol

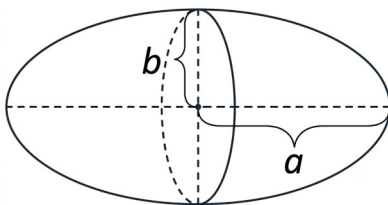
$$V = \frac{1}{2} \pi R^2 h$$



4. Khối tròn xoay sinh ra bởi Elip

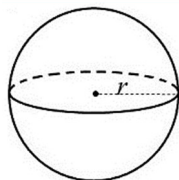
Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi Elip

- Quanh trục hoành Ox : $V = \frac{4}{3} \pi a b^2$
- Quanh trục tung Oy : $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$



5. Thể tích khối cầu

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



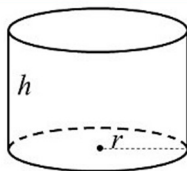
6. Thể tích nón

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



7. Thể tích trụ

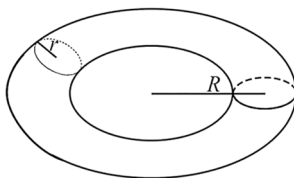
$$V = \pi r^2 h$$



8. Thể tích chiếc phao hình xuyến

Cái phao có bán kính R và r như hình vẽ có thể tích là

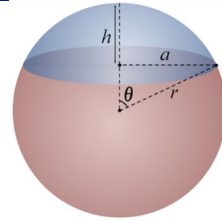
$$V = 2\pi^2 r^2 R$$



9. Thể tích chỏm cầu

Chỏm cầu có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng h cắt ra bởi hình cầu có bán kính r .

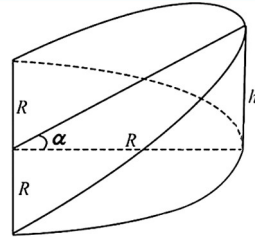
$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$



10. Thể tích hình nêm

Hình nêm (như hình vẽ) có các kích thước R , h và góc α .

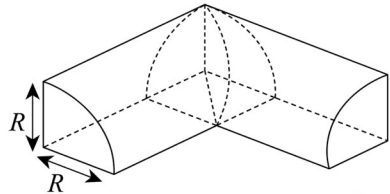
$$V = \frac{2}{3}R^2h = \frac{2}{3}R^3 \tan \alpha$$



11. Công thức khối Steinmetz

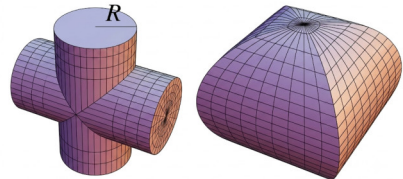
Phần giao giữa $\frac{1}{4}$ hai hình trụ vuông góc, cùng bán kính R có thể tích

$$V = \frac{2R^3}{3}$$



Phần giao giữa hai hình trụ vuông góc, cùng bán kính R có thể tích:

$$V = \frac{16R^3}{3}$$



VIII – PHƯƠNG TRÌNH CỦA MỘT SỐ ĐƯỜNG CƠ BẢN ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

a) Đường thẳng

Phương trình đường thẳng: $y = ax + b$.

b) Parabol

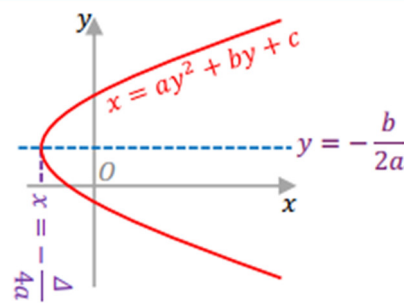
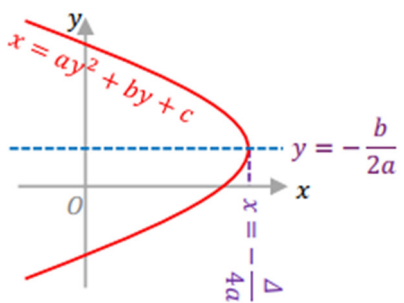
Phương trình parabol: $y = ax^2 + bx + c$.

- Nếu parabol có đỉnh nằm trên trục Oy thì Parabol có dạng $y = ax^2 + c$.

- Nếu parabol có đỉnh là gốc tọa độ thì Parabol có dạng $y = ax^2$.

c) Parabol xoay ngang

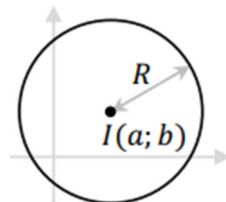
$$x = ay^2 + by + c \quad (a \neq 0)$$

	
Nếu $a > 0$ Parabol hướng bề lõm theo chiều dương của trục Ox.	Nếu $a < 0$ Parabol hướng bề lõm theo chiều âm của trục Ox.
Trục đối xứng của Parabol $y = -\frac{b}{2a}$. Tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$.	

c) Đường tròn

Phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$



Phương trình phân trái, phải của đường tròn

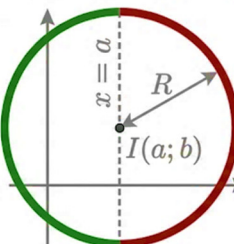
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow (x - a)^2 = R^2 - (y - b)^2$$

$$\Rightarrow x - a = \pm \sqrt{R^2 - (y - b)^2} \Rightarrow x = a \pm \sqrt{R^2 - (y - b)^2}$$

Phần đường tròn bên trái
đường thẳng $x = a \Rightarrow x \leq a$

$$\Rightarrow x - a = -\sqrt{R^2 - (y - b)^2}$$

$$\Rightarrow x = a - \sqrt{R^2 - (y - b)^2}$$



Phần đường tròn bên phải
đường thẳng $x = a \Rightarrow x \geq a$

$$\Rightarrow x - a = \sqrt{R^2 - (y - b)^2}$$

$$\Rightarrow x = a + \sqrt{R^2 - (y - b)^2}$$

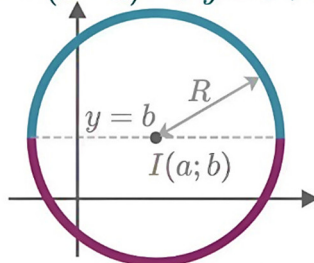
Phương trình phần trên, dưới của đường tròn

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Rightarrow (y-b)^2 = R^2 - (x-a)^2$$

$$\Rightarrow y-b = \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2} \Rightarrow y = b \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$$

Phần đường tròn bên trên đường thẳng $y = b \Rightarrow y \geq b$

$$\Rightarrow y-b = \sqrt{R^2 - (x-a)^2} \Rightarrow y = b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$$



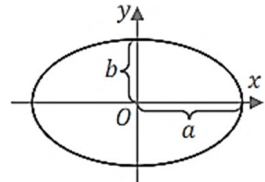
Phần đường tròn bên dưới đường thẳng $y = b \Rightarrow y \leq b$

$$\Rightarrow y-b = -\sqrt{R^2 - (x-a)^2} \Rightarrow y = b - \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$$

d) Elip

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , elip có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

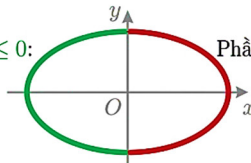
- Hai tiêu điểm: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
- Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$
- Độ dài trục lớn là $2a$, độ dài trục nhỏ là $2b$
- $MF_1 + MF_2 = 2a$ với M là một điểm bất kì thuộc elip


Phương trình phần trái, phải của elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow x = \pm \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

Phần đường elip bên trái trục tung $x \leq 0$:

$$x = -\sqrt{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

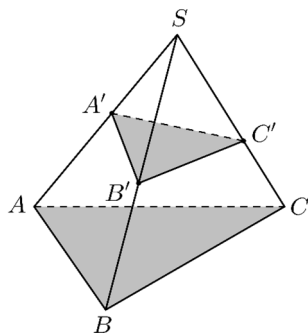


Phần đường elip bên phải trục tung $x \geq 0$:

$$x = \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

7. Tỷ số thể tích trong khối chóp tam giác (Công thức Simson)

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



8. Tỷ số thể tích trong khối chóp tứ giác

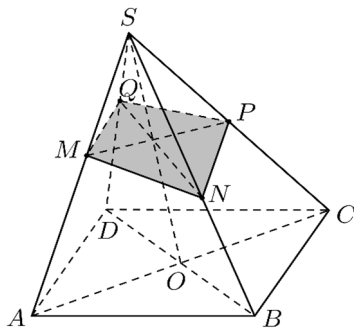
Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.

Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại

$$M, N, P, Q \text{ sao cho } \frac{SM}{SA} = x, \frac{SN}{SB} = y, \frac{SP}{SC} = z, \frac{SQ}{SD} = t$$

. Khi đó:
$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right)$$

và
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}.$$

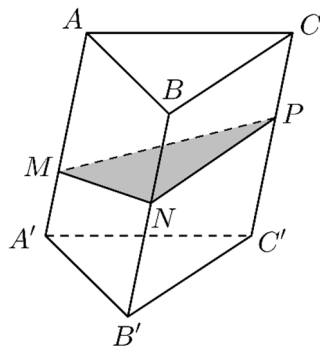


9. Tỷ số thể tích trong khối lăng trụ tam giác

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Một mặt phẳng cắt các cạnh AA' , BB' , CC' lần

lượt tại M , N , P sao cho $\frac{AM}{AA'} = x$, $\frac{BN}{BB'} = y$, $\frac{CP}{CC'} = z$.

Khi đó:
$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{x + y + z}{3}.$$



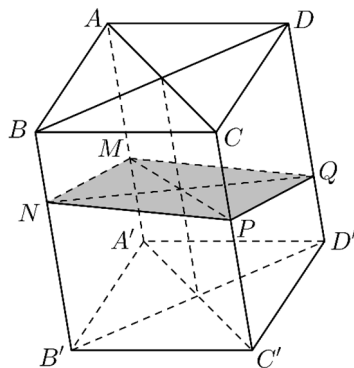
10. Tỷ số thể tích trong khối hộp

Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng cắt các cạnh AA' , BB' , CC' , DD' lần lượt

tại các điểm M , N , P , Q sao cho $\frac{AM}{AA'} = x$, $\frac{BN}{BB'} = y$, $\frac{CP}{CC'} = z$, $\frac{DQ}{DD'} = t$. Khi đó:

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x + y + z + t}{4}$$

và $x + z = y + t$.



Lời giải

a) Khoảng biến thiên: $R = 45 - 25 = 20$

Giá trị đại diện	$\frac{25+30}{2}$	$\frac{30+35}{2}$	$\frac{35+40}{2}$	$\frac{40+45}{2}$
Thời gian (phút)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số học sinh	8	16	4	2
Tần số tích lũy	8	24	28	30

- Tìm nhóm chứa Q_1 : $30.0,25 = 7,5$, suy ra Q_1 thuộc nhóm [25;30)

Khi đó: $Q_1 = 25 + \frac{30.0,25 - 0}{8} \cdot 5 = 29,6875$

- Tìm nhóm chứa Q_2 : $30.0,5 = 15$, suy ra Q_2 thuộc nhóm [30;35)

Khi đó: $Q_2 = 30 + \frac{30.0,5 - 8}{16} \cdot 5 = 32,1875$

- Tìm nhóm chứa Q_3 : $30.0,75 = 22,5$, suy ra Q_3 thuộc nhóm [30;35)

Khi đó: $Q_3 = 30 + \frac{30.0,75 - 8}{16} \cdot 5 = 34,53125$

Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 4,84375$

b)

Bật tần số: **SHIFT** **MENU** **▼** **3** **1**

Nhập giá trị đại diện và tần số của mỗi nhóm vào

máy tính: **MENU** **6** **1**Bấm **OPTN** **3**

Đọc kết quả:

• Phương sai: $\sigma^2x = 16.66666667$ • Độ lệch chuẩn: $\sigma x = 4.082482905$

Ta thấy giá trị Q_1, Q_2, Q_3 trong máy tính không trùng với đầu mút nào của các nhóm nên Q_1, Q_2, Q_3 phải tính bằng công thức.

M	x	Freq
2	32.5	16
3	37.5	4
4	42.5	2
5		

$\bar{x}$	=32.5
σx	=975
Σx^2	=32187.5
$\sigma^2 x$	=16.66666667
σx	=4.082482905
$\Sigma^2 x$	=17.24137931

sx	=4.152273993
n	=30
$\min(x)$	=27.5
Q_1	=27.5
Med	=32.5
Q_3	=32.5

5. Phương pháp 'buộc chun' trong hoán vị

Yêu cầu một số đối tượng phải luôn ở cạnh nhau

Bước 1. Gom các đối tượng phải "đứng cạnh nhau" thành một khối (gọi là 1 đối tượng duy nhất).

Bước 2. Tính số cách sắp xếp các đối tượng khác và khối đó.

Bước 3. Tính số cách hoán vị bên trong từng khối.

Bước 4. Nhân kết quả ở bước 2 và bước 3 lại.

6. Phương pháp vách ngăn

Yêu cầu sắp xếp đối tượng không đứng cạnh nhau.

Bước 1. Tạo các khoảng trống giữa các đối tượng làm "vách ngăn".

Bước 2. Xác định số lượng phân tử cần đặt vào mỗi khoảng.

Bước 3. Dùng công thức tổ hợp để tính số cách chọn các vách ngăn hoặc phân tử.

7. Công thức đếm nâng cao

Nhóm đối tượng	Tên gọi	Khi nào dùng? (Từ khóa nhận diện)	Công thức
Sắp xếp thứ tự (Lấy $k = n$)	Hoán vị	Sắp xếp tất cả n vật khác nhau vào n chỗ.	$P_n = n!$
	Hoán vị vòng quanh	Sắp xếp n vật thành một vòng tròn.	$Q_n = (n-1)!$
	Hoán vị lặp	Sắp xếp n vật nhưng có các nhóm giống hệt nhau.	$P_n(n_1, n_2, \dots) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$
	Hoán vị sai	Không có vật nào ở đúng vị trí ban đầu (xếp nhầm).	$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$
Chọn và xếp thứ tự	Chỉnh hợp	Chọn k vật từ n vật và có xếp thứ tự.	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
	Chỉnh hợp lặp	Chọn k vật, có thứ tự, một vật có thể chọn lại.	$F_n^k = n^k$

Chọn/chia và không xếp thứ tự	Tổ hợp	Chọn một nhóm k vật, không quan tâm thứ tự.	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
	Vách ngăn (loại 1)	Chia n kẹo cho k trẻ, mỗi trẻ ít nhất 1 cái.	C_{n-1}^{k-1}
	Vách ngăn (loại 2)	Chia n kẹo cho k trẻ, có trẻ có thể không có.	C_{n+k-1}^{k-1}
	Tổ hợp lặp	Chọn k vật từ n loại, không thứ tự, có lặp.	C_{n+k-1}^k
Chọn không kề nhau	Bổ đề Kaplansky 1	Chọn k vật từ n vật hàng ngang không cạnh nhau.	C_{n-k+1}^k
	Bổ đề Kaplansky 2	Chọn k vật từ n vật vòng tròn không cạnh nhau.	$\frac{n}{n-k} C_{n-k}^k$

III – NHỊ THỨC NEWTON

1. Công thức khai triển nhị thức Newton

Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và với mọi cặp số a, b , ta có:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

2. Tính chất

- Số các số hạng của khai triển bằng $n+1$.
- Số hạng tổng quát có dạng: $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, $k \in \mathbb{N}$
- Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau:
 $C_n^k = C_n^{n-k}$.
 Đặc biệt: $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.
- ✓ Nhận xét: Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì ta sẽ thu được những công thức đặc biệt.
 - $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n$
 Cho $x=1 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$
 - $(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n$
 Cho $x=1 \Rightarrow C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$